

CORRECTION TD - MF3

EXERCICES À MAÎTRISER

Ex. n°1 • Dimensionnement d'une pompe

★☆☆

7683

Relation de Bernoulli en terme de puissance :

$$D_m \times \left[\frac{P_S - P_E}{\rho} + \frac{v_S^2 - v_E^2}{2} + g(z_S - z_E) \right] = \mathcal{P}_u$$

Le rayon étant constant, la vitesse n'est aussi (conservation du débit).

Avec les données de l'énoncé :

$$\mathcal{P}_u = D_m \times \left[-\frac{P_0}{2\rho} + gh \right] = 120 \text{ W}$$

Ex. n°2 • Débitmètre de Venturi

★☆☆

1417

1) L'écoulement étant stationnaire :

$$D_m = \rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2} > v_1$$

Le théorème de Bernoulli donne :

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} = 0 \Rightarrow \Delta P = P_1 - P_2 > 0$$

2) Le théorème de Bernoulli donne :

$$\frac{D_m^2}{2\rho^2} \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) + \frac{P_2 - P_1}{\rho} = 0 \Rightarrow D_m = \sqrt{\frac{2\rho \Delta P}{\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}}}$$

Ex. n°3 • Formule de Toricelli

★☆☆

7377

1) « Approximation de régime quasi-permanent » signifie que la hauteur d'eau dans le réservoir varie suffisamment lentement pour pouvoir appliquer toutes les relations du régime permanent (conservation du débit, Bernoulli, etc.)

Par conservation du débit massique :

$$D_m = \rho S v_A = \rho s v_B \Rightarrow v_B = \frac{S v_A}{s} \gg v_A$$

2) Appliquons le théorème de Bernoulli entre la surface libre du réservoir et la sortie de l'orifice :

$$\frac{v_B^2 - v_A^2}{2} + \frac{P_B - P_A}{\rho} + g(z_B - z_A) = 0$$

Or, $P_B = P_A = P_{\text{atm}}$ et $v_B \gg v_A$. On en déduit :

$$\frac{v_B^2}{2} - gH = 0 \Rightarrow D_m = \rho s v_B = \rho s \sqrt{2gH(t)}$$

3) La conservation du débit s'écrit :

$$S v_A = s v_B$$

Or, $v_A = -\frac{dH}{dt}$ avec le signe « - » car $v_A > 0$ mais H diminue. On en déduit :

$$-S \frac{dH}{dt} = s \sqrt{2gH(t)} \Rightarrow \frac{dH}{dt} = -\alpha \sqrt{2gH}$$

4) On résout par séparation des variables :

$$\frac{dH}{\sqrt{H}} = -\alpha \sqrt{2g} dt \Rightarrow \int_{H_0}^0 \frac{dH}{\sqrt{H}} = -\alpha \sqrt{2g} \int_0^{\Delta t} dt$$

Ainsi,

$$\left[2\sqrt{H} \right]_{H_0}^0 = -\alpha \sqrt{2g} \left[t \right]_0^{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2H_0}{g}}$$

Ex. n°4 • Tube de Pitot

★☆☆

3038

La vitesse au point B est nulle.

Le théorème de Bernoulli donne, en négligeant la variation d'énergie potentielle de pesanteur :

$$\frac{v_B^2 - v_A^2}{2} + \frac{P_B - P_A}{\rho_0} = 0 \Rightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{2(P_B - P_A)}{\rho_0}}$$

Ainsi, la mesure statique de la différence de pressions $P_B - P_A$ permet d'accéder à la mesure de la vitesse au point B. On note A' et B' les points à la surface du liquide.

$$P_{B'} = P_B + \rho_0 g(z_B - z_{B'}) = P_A + \rho_0 g(z_A - z_{A'}) + \rho_1 g h$$

Ainsi :

$$P_B - P_A = \rho_1 g h - \rho_0 g \left[\underbrace{(z_B - z_{B'}) - (z_A - z_{A'})}_{\simeq h} \right] \simeq \rho_1 g h \quad \text{car : } \rho_1 \gg \rho_0$$

On en déduit :

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2\rho_1 g h}{\rho_0}}$$

Ex. n°5 • Lance incendie



2646

1) Par définition du débit :

$$v = \frac{D_m}{\rho S} = \frac{D_m}{\rho \pi r^2} = 2,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2) L'eau étant incompressible, il y a conservation du débit volumique tout au long du tuyau et de la lance. Si la vitesse d'éjection en sortie de lance est très supérieure à la vitesse débitante dans le tuyau, c'est que la section de sortie de la lance est très inférieure à la section du tuyau.

3) Appliquons le théorème de Bernoulli entre le point A et la sortie de la lance, les pertes étant pour le moment négligées,

$$P_A = P_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho (v_e^2 - v^2) + \rho g h = 7,8 \text{ bar}$$

4) La relation de Bernoulli permet de constater que le produit ρv^2 est homogène à une pression. Ainsi, f est sans dimension.

5) Relation de Bernoulli en terme de puissance, avec pertes :

$$D_m \times \left[\frac{P_{\text{atm}} - P_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{v_e^2 - 0^2}{2} + g(h - 0) \right] = \mathcal{P}_u - \frac{D_m K L}{\rho}$$

Ainsi,

$$\mathcal{P}_u = D_m \times \left[\frac{v_e^2}{2} + gh + KL \right] = 6,8 \text{ kW}$$

POUR ALLER PLUS LOIN

Ex. n°6 • Clepsydre



5382

1) On utilise la relation de Bernoulli (écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène) :

$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \rho g \underbrace{z_B}_{=0} + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

Or, $P_A = P_B = P_0$. De plus, par conservation du débit volumique (écoulement incompressible) :

$$D_v = v_A S_A = v_B S_B \Rightarrow v_A = \underbrace{\frac{S_B}{S_A}}_{\ll 1} v_B \ll v_B$$

La relation de Bernoulli devient :

$$\rho g z_A \simeq \frac{1}{2} \rho v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2g z_A}$$

2) La conservation du débit volumique assure que :

$$v_A S_A = v_B S_B \Rightarrow v_B = \frac{\pi a^2 z^{2n}}{S_0} v_A = - \frac{\pi a^2 z^{2n}}{S_0} \frac{dz_A}{dt}$$

On a bien un signe « - » car les vitesses sont prises positives (prises en norme) mais z_A diminue dans le temps.

On injecte ce résultat dans la formule de Torricelli :

$$- \frac{\pi a^2 z^{2n}}{S_0} \frac{dz_A}{dt} = \sqrt{2g z_A} \Rightarrow \frac{dz_A}{dt} + K z_A^{1/2-2n} = 0$$

3) Pour une clepsydre : « la hauteur de la surface libre baisse linéairement dans le temps ». Ainsi :

$$z_A = z_0 - \alpha t \Rightarrow \frac{dz_A}{dt} = -\alpha = cte \Rightarrow n = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \alpha = K$$

1) Le lac étant très grand par rapport à la conduite, on peut considérer qu'à la surface $v_1 \approx 0$.

La vitesse en sortie de la conduite se déduit du débit volumique,

$$v_2 = \frac{D_m}{\rho \pi^2} = 5,1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

2) L'écoulement est incompressible et permanent. Comme on cherche la puissance maximale disponible, on néglige les pertes de charge. La relation de Bernoulli appliquée entre la surface du lac et la sortie de la conduite donne :

$$D_m \times \left[\frac{P_{\text{atm}} - P_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right] = -\mathcal{P}$$

où \mathcal{P} est la puissance cédée par le fluide à la turbine. Ainsi,

$$\mathcal{P} = D_m \times \left[-\frac{v_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) \right] = 5,8 \text{ MW}$$

On peut remarquer que cette puissance ne dépend pas de la position de la turbine au sein de la conduite : elle est la même que la turbine soit proche de la surface du lac ou au contraire proche de la sortie de la conduite.

Ce résultat met donc en défaut deux raisonnements spontanés (contradictoires !) : on pourrait croire que la puissance est plus élevée en bas de la chute d'eau car l'eau aurait davantage de temps pour accélérer ... ou au contraire qu'elle est plus élevée en haut car les pertes de charge qui dissipent de l'énergie ont lieu dans la conduite. Ces raisonnements sont faux, car ils sont issus d'une transposition trop naïve de la mécanique des solides. En raison de l'incompressibilité de l'eau, il y a conservation du débit volumique et la vitesse de l'écoulement est la même dans toute la conduite.

De façon plus imagée, si l'écoulement était accéléré sur le bas de la conduite alors cela créerait un vide qui aspirerait l'eau située au dessus, et donc l'accélérerait autant. Réciproquement, si l'écoulement était freiné sur le bas de la conduite alors cela formerait un bouchon qui ralentirait tout l'écoulement.

3) La valeur donnée est cohérente avec celle qu'on vient de déterminer ... ouf ! La différence vient des pertes de charge, non prises en compte dans la question précédente. Celles-ci sont de deux types : régulières le long de la conduite, et singulière à l'entrée. On peut par exemple exprimer la perte de charge sous forme d'une altitude Δz_c .

Ici, la puissance perdue s'écrit :

$$\mathcal{P}_{\text{diss}} = D_m g \Delta z_c = 0,4 \times \mathcal{P} \Rightarrow \Delta z_c = 0,4 \times \frac{\mathcal{P}}{D_m g} = 9,5 \text{ m}$$

Tout se passe donc comme si l'écoulement était parfait (pas de perte de charge) mais si le niveau du lac était plus bas de 9,5 m.

1) On indice par 1 les propriétés de l'air juste avant l'hélice et par 2 les propriétés de l'air juste après l'hélice.

L'écoulement est stationnaire donc le débit massique se conserve. Au niveau de l'hélice, on a donc :

$$D_m = \rho v_1 S_h = \rho v_2 S_h \Rightarrow v_1 = v_2$$

On utilise la relation de Bernoulli pour l'écoulement avant l'hélice (écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène) entre la surface Σ_A et la surface Σ_h .

$$P_0 = P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

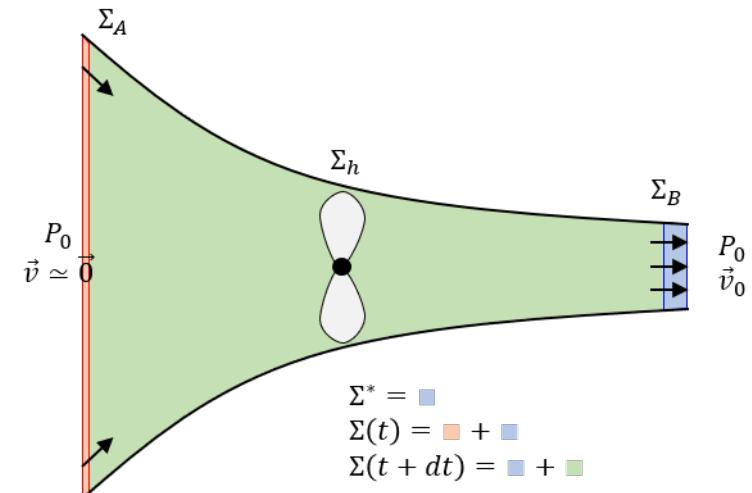
De même, on utilise la relation de Bernoulli pour l'écoulement après l'hélice entre la surface Σ_B et la surface Σ_h .

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

On en déduit :

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{1}{2} \rho v_0^2$$

2) On fait un bilan d'énergie cinétique sur le système fermé décrit ci-dessous. On indique par * la partie commune au système à t et $t + dt$.



$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}_u$$

Avec :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_c(t+dt) = \mathcal{E}_c^* + \frac{1}{2}\rho \times S_B v_0 dt \times v_0^2 \\ \mathcal{E}_c(t) = \mathcal{E}_c^* + 0 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\mathcal{P}_u = \frac{\rho \pi D_B^2 v_0^3}{8}$$

Cette puissance est celle de exercée par l'hélice sur le fluide. En norme, la force exercée par le fluide sur l'hélice est égale à la force exercée par l'hélice sur le fluide (principe des actions réciproques). Donc :

$$\mathcal{P}_u = Fv_2 \quad \text{avec : } D_v = v_2 S_h = v_0 S_B$$

On en déduit donc :

$$F = \frac{\mathcal{P}_u}{v_2} = \frac{\mathcal{P}_u}{v_0} \left(\frac{D_h}{D_B} \right)^2 = \frac{\rho \pi D_h^2 v_0^2}{8}$$

Ex. n°9 • Homogénéisation d'un écoulement

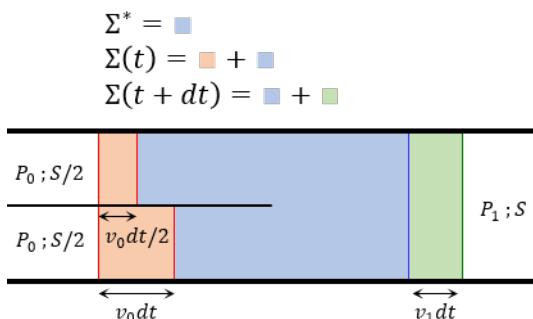


1) Il s'agit de la viscosité du fluide.

2) Écoulement stationnaire donc conservation du débit massique :

$$\mu S v_1 = \mu \frac{S}{2} v_0 + \mu \frac{S}{2} \frac{v_0}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{3v_0}{4}$$

On fait un bilan de quantité de mouvement (projété directement sur x) sur le système fermé décrit ci-dessous. On indique par * la partie commune au système à t et $t+dt$.



$$\frac{dp}{dt} = \sum f_P \Rightarrow \frac{p(t+dt) - p(t)}{dt} = P_0 \frac{S}{2} + P_0 \frac{S}{2} - P_1 S$$

Or :

$$\begin{cases} p(t+dt) = p^* + \mu \times S v_1 dt \times v_1 \\ p(t) = p^* + \mu \times \frac{S}{2} v_0 dt \times v_0 + \mu \times \frac{S}{2} \frac{v_0}{2} dt \times \frac{v_0}{2} \end{cases}$$

On en déduit :

$$P_0 - P_1 = \mu \left(v_1^2 - \frac{v_0^2}{2} - \frac{v_0^2}{8} \right) \Rightarrow P_1 = P_0 + \frac{\mu v_0^2}{16}$$

3) Bilan d'énergie cinétique sur le même système donne :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}$$

Or :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_c(t+dt) = \mathcal{E}_c^* + \frac{1}{2} \mu \times S v_1 dt \times v_1^2 \\ \mathcal{E}_c(t) = \mathcal{E}_c^* + \frac{1}{2} \mu \times \frac{S}{2} v_0^2 dt \times v_0 + \frac{1}{2} \mu \times \frac{S}{2} \frac{v_0}{2} dt \times \left(\frac{v_0}{2} \right)^2 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\mathcal{P} = \frac{\mu S}{2} \left(v_1^3 - \frac{v_0^3}{2} - \frac{v_0^3}{16} \right) \Rightarrow \mathcal{P} = -\frac{9\mu S v_0^3}{128} < 0$$

La puissance des forces intérieures est négative, donc il s'agit bien d'une dissipation d'énergie.